09/01/2020

Άσκηση 1: Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση $S = x^2 + \frac{1}{2}y^2$. i) Αποδείξτε ότι είναι κανονική επιφάνεια και ότι τα διανύσματα $w_1 = (0,1,0)$ και $w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ εφάπτονται της στο σημείο $P\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$.

ii) Βρείτε τις εικόνες των w_1, w_2 μέσω της απεικόνισης Weingarten.

Λύση

i) Η S είναι επιφάνεια γράφημα Γ_h όπου $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

Άρα η S κανονική με σύστημα συντεταγμένων $X: \mathbb{R}^2 \to S$, $X(x,y) = \left(x, y, x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)$. Η απεικόνιση Gauss της S είναι $N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$, $X_x \times X_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & y \end{vmatrix}$

$$X_x \times X_y = (-2x, -y, 1)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + y^2 + 1}}(-2x, -y, 1)$$

$$N(P) \underset{P = X\left(\frac{1}{2}, 0\right)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

$$\langle w_1, N(P) \rangle = 0 \Rightarrow w_1 \in T_PS$$

$$\langle w_2, N(P) \rangle = 0 \Rightarrow w_2 \in T_PS$$

ii) $L_p : T_pS \to T_pS$, $L_p = -dN_p$

$N : S \to S^2$

$L_p w_1, L_p w_2$

$w_1 = a X_x(\frac{1}{2},0) + b X_y(\frac{1}{2},0)$

$L_p w_1 = a L_p X_x(\frac{1}{2},0) + b L_p X_y(\frac{1}{2},0)$

$w_1 = a X_x(\frac{1}{2},0) + B X_y(\frac{1}{2},0) \iff$

$(0,1,0) = a(1,0,1) + B(0,1,0) \iff$

$(0,1,0) = (a,B,a) \iff a=0$ και $B=1$.

$w_1 = X_y(\frac{1}{2},0)$, $L_p w_1 = -N_y(\frac{1}{2},0) = \dots$

Όμοια $w_2 = a X_x(\frac{1}{2},0) + B X_y(\frac{1}{2},0)$

$\iff \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = a(1,0,1) + B(0,1,0)$

$\iff \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (a,B,a)$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $B=0$

Άρα $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X_x(\frac{1}{2},0) \Rightarrow L_p w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} N(\frac{1}{2},0) = \dots$

Άσκηση 2: Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση $z = xy^2$. i) Αποδ. ότι είναι κανονική ii) Εξετάστε αν είναι ευθειογενής ή αναπτυκτή.

Λύση

Η S είναι επιφάνεια Γρ της $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x,y) = xy^2$. Επομένως είναι κανονική επιφάνεια με σύστημα συντ/νων

$X(x,y) = (x, y, xy^2)$

$X(x,y) = (0,y,0) + x(1,0,y^2)$
$= c(y) + x\,w(y)$

όπου $c(y) = (0,y,0)$ και $w(y) = (1,0,y^2) \neq (0,0,0)$

Άρα η S είναι ευθειογενής

$N = \dfrac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$, $\quad X_x \times X_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & y^2 \\ 0 & 1 & 2xy \end{vmatrix}$

$= (-y^2, -2xy, 1)$

Άρα το $N = \dfrac{1}{\sqrt{y^4 + 4x^2y^2 + 1}}(-y^2, -2xy, 1)$

Δεν είναι ανεξάρτητο του x άρα S όχι αναπτυκτή.

<u>Β' τρόπος:</u> Η καμπυλότητα Gauss της S είναι

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} \neq 0$, άρα όχι αναπτυκτή.

$K \leq 0$: Τα σημεία $X(x,y)$ με $K \neq 0$ είναι σημεία υπερβολικά. Τα σημεία $X(x,0) = (x,0,0)$, $h = 0$

$e = \dfrac{h_{xx}}{\sqrt{\dots}} = 0$, $\quad f = \dfrac{h_{xy}}{\sqrt{\dots}} = \dfrac{2y}{\dots}$

$g = \dfrac{h_{yy}}{\sqrt{\dots}} = \dfrac{2x}{\sqrt{\dots}}$

$e(x,0) = 0 = f(x,0)$
$g(x,0) = \dfrac{2x}{\sqrt{\dots}}$

<u>Απάντηση:</u> Τα σημεία $X(x,0)$ με $x \neq 0$ είναι παραβολικά. Το σημείο $X(0,0)$ είναι ισόπεδο

$k_1(X(0,0)) = k_2(X(0,0)) = 0$

<u>Αναπαράσταση ασυμπ. καμπυλών:</u>

Η επιφανειακή καμπύλη $c(t) = X(x(t), y(t))$ είναι ασυμπ. $\Leftrightarrow$ $e(x(t), y(t))(x')^2 + 2f(x(t), y(t))x'(t)y'(t)$

$+ g(x(t), y(t))(y')^2 = 0.$ $\Leftrightarrow$

$2y(t)\,x'(t)\,y'(t) + 2x(t)\,(y'(t))^2 = 0$ $\Leftrightarrow$

$y'(t)\,(y(t)\,x'(t) + x(t)\,y'(t)) = 0$ $\Leftrightarrow$

$y'(t) = 0$ ή $y(t)\,x'(t) + x(t)\,y'(t) = 0$ $\Leftrightarrow$

$(x(t)\,y(t))' = 0$ $\Leftrightarrow$

$y(t) = $ σταθ.

$y(t) = a_1 = $ σταθ. ή $x(t)\,y(t) = a_2 = $ σταθ.

$(x(t) = t)$ $\qquad$ $(x(t) = t)$

- $X(x(t), a_1) = X(t, a_1) = (t, a_1, t a_1^2) = (0, a_1, 0) + t(1, 0, a_1^2)$

- $X\left(t, \frac{a_2}{t}\right) = \left(t, \frac{a_2}{t}, t \cdot \frac{a_2^2}{t^4}\right) = \left(1, \frac{a_2}{t}, \frac{a_2^2}{t}\right)$

Θεωρώ νέες παραμ. $u = y$ και $v = xy$

$X(x,y) = X\left(\frac{v}{u}, u\right)$

$\tilde{X}(u,v) = X\left(\frac{v}{u}, u\right)$

όπου $\Phi(u,v) = \left(\frac{u}{v}, u\right)$

Άσκηση 3: Έστω c κανονική καμπύλη της επιφάνειας S. Αν η c έχει παντού θετική καμπυλότητα και είναι συγχρόνως γραμμή καμπυλότητας και ασυμπτωτική τότε είναι επίπεδη και το επίπεδο της εφάπτεται της S σε όλα τα σημεία της c.

Λύση

$k_n(\dot c(s)) = 0 \iff \dfrac{II(\dot c(s))}{I(\dot c(s))} = 0 \iff$

$II(\dot c(s)) = 0 \iff \langle L\dot c(s), \dot c(s)\rangle = 0 \iff$

$\langle -dN_{c(s)}\dot c(s), \dot c(s)\rangle = 0 \iff \langle (N\circ c)^{\cdot}(s), \dot c(s)\rangle = 0 \iff$

$(\langle N\circ c(s), \dot c(s)\rangle)^{\cdot} - \langle N(c(s)), \ddot c(s)\rangle = 0 \iff$

$\langle N(c(s)), \dot{\vec t}(s)\rangle = 0 \iff \langle N(c(s)), k(s)\vec n(s)\rangle = 0$

$\iff k(s)\langle N c(s), n(s)\rangle = 0 \iff \langle N(c(s)), n(s)\rangle = 0$

$\Rightarrow \vec n(s) \in T_{c(s)}S.$

$\vec b(s) = \vec t(s)\times\vec n(s) = \pm N(c(s))$

$\dot{\vec b}(s) = \pm (N\circ c(s))^{\cdot} \overset{\text{Θ. Rodrig.}}{=} \pm\lambda(s)\dot c(s)$

$\Rightarrow -\tau(s)\vec n(s) = \pm\lambda(s)\vec t(s) \Rightarrow \tau(s) = 0.$

Άσκηση 4: Έστω c(t) ασυμπτωτική καμπύλη λείας επιφαν. S με καμπυλότητα $k(s)>0$, $\forall s\in I$. Ν.δ.ο η στρέψη της ισχύει $\tau^2(s) = -K(c(s))$.

Λύση

Άρα $\vec{b}(s) = \pm N(c(s))$

$\Rightarrow \dot{\vec{b}}(s) = \pm (N \circ c)^{\cdot}(s)$

$\Rightarrow -\tau(s)\vec{n}(s) = \pm L_{c(s)}(\dot{c}(s))$

$\Rightarrow \| -\tau(s)\vec{n}(s)\|^2 = \| L(\dot{c}(s))\|^2$

$\Rightarrow \tau^2(s) = \langle L_{c(s)}\dot{c}(s), L\dot{c}(s)\rangle$

$\Rightarrow \tau^2(s) = \mathrm{III}_{c(s)}(\dot{c}(s))$

$\mathrm{III}(\dot{c}(s)) - 2H(c(s))\cancel{\mathrm{II}}\overset{\to 0}{(\dot{c}(s))} + K(s)\mathrm{I}(\dot{c}(s)) = 0$

$\Rightarrow \tau^2(s) + K(c(s)) = 0 \Rightarrow \tau^2(s) = -K(c(s))$

Άσκηση 5: Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων της κανονικής επιφάνειας S με παραμέτρους $(u,v) \in U$. Αν το X είναι σύστημα ασυμπτ. γραμμών, οι παραμετρικές των καμπυλών τέμνονται υπό σταθερή γωνία και $H \neq 0$ τότε ισχύει $\frac{H^2}{K} = \text{σταθ.}$

$\Downarrow$

$$\cos\theta = \frac{\langle X_u, X_v\rangle}{\|X_u\|\|X_v\|}$$

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \Rightarrow F = \sqrt{EG}\cos\theta$$

$k_n(X_u) = 0 = k_n(X_v)$

$$k_n(X_u) = \frac{\mathrm{II}(u)}{\mathrm{I}(u)}$$

$$k_n(X_u) = \frac{e}{E}$$

$$k_n(X_v) = \frac{g}{G}.$$

πορτο $e=g=0$.

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG-F^2)} = \frac{-fF}{EG-F^2}$$

$$= \frac{-fF}{EG - EG\cos^2\theta} = -\frac{fF}{EG(1-\cos^2\theta)}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = -\frac{fF}{EG\sin^2\theta}}$$

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -\frac{f^2}{EG-EG\cos^2\theta}, \quad \boxed{K = \frac{-f^2}{EG\sin^2\theta}}$$

$$\frac{H^2}{K} = \frac{f^2F^2}{E^2G^2\sin^4\theta}\left(-\frac{EG\sin^2\theta}{f^2}\right) = -\frac{F^2}{EG\sin^2\theta}$$

$$= -\frac{EG\cos^2\theta}{EG\sin^2\theta} = -\cot^2\theta$$

Έστω c κανονική καμπύλη κανονικής επιφάνειας σε S. Θεωρούμε την επιφάνεια με παραμετρική παράσταση $X(t,u) = c(t) + uN(c(t))$ (8)

Υποθέτουμε ότι η X είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow$ η c είναι γραμμή καμπυλότητας της S.

Απόδ

Η X είναι ευθειογενής.

Πρόταση: Η ευθειογενής επιφάνεια $X(u,v) = c(u)+w(u) \cdot v$, $\|w(u)\| = 1$ είναι αναπτυκτή. $\Leftrightarrow [c'(u), c''(u), c'''(u)] = 0$

Η X είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow [c'(t), N\circ c(t), (N\circ c)'(t)] = 0$

$\Rightarrow (N\circ c)'(t) = \lambda(t)\, c'(t) + \mu(t)\, N\circ c(t)$

$\Rightarrow \langle (N\circ c)'(t), (N\circ c)(t) \rangle = \mu(t)$

$\Rightarrow \mu(t) = \frac{1}{2} \left(\langle N\circ c(t), N\circ c(t) \rangle \right)' \Rightarrow \mu(t) = 0$

Άρα έχω $(N\circ c)'(t) = \lambda(t)\, c'(t)$

$\xRightarrow[\text{Rod.}]{\text{Θ.}}$ c γραμμή καμπυλότητας.

Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια 9

$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av), a \neq 0$. Να βρεθούν οι γραμμές καμπυλότητας.

Λύση

Η X είναι λεία

$X_u = (\cos v, \sin v, 0)$

$X_v = (-u\sin v, u\cos v, a)$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$X_u \times X_v = (a\sin v, -a\cos v, u) \neq (0,0,0)$

Η X είναι κανονική με ανεξάρτητη βάση.

$$N = \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}(a\sin v, -a\cos v, u)$$

Η επιφανειακή καμπύλη $c(t) = X(u(t), v(t))$ είναι γραμμή καμπυλότητας $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} (v'(t))^2 & -u'(t)v'(t) & (u'(t))^2 \\ E(u(t),v(t)) & F(\ ,\ ) & G(\ ,\ ) \\ e(\ ,\ ) & f(\ ,\ ) & g(\ ,\ ) \end{vmatrix} = 0$$

$E = \|X_u\|^2 \Rightarrow E = 1$

$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0 \Rightarrow F = 0$

$G = \|X_v\|^2 \Rightarrow G = u^2 + a^2$

$e = \langle X_{uu}, N \rangle$

$f = \langle X_{uv}, N \rangle$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle$

$X_{uu} = 0$, $X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$

$X_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$

$e = 0$, $f = -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$, $g = 0$.

$e = g = 0$ άρα σύστημα ασυμπ. καμπυλών.

Η επιφάνεια αν $u =$ σταθ τότε είναι κυλινδρική έλικα.

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -v'u' & (u')^2 \\ 1 & 0 & u^2+a^2 \\ 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & (u')^2 \\ 1 & u^2+a^2 \end{vmatrix} = 0 \iff (u^2+a^2)(v')^2 - (u')^2 = 0$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{u^2+a^2}\, v' = u' \\ \sqrt{u^2+a^2}\, v' = -u' \end{cases} \iff \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}} = v' \quad \text{ή} \quad \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}} = -v'$$

$$\iff \int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}} = v + \text{σταθ} \quad \text{ή} \quad \int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}} = -v + \text{σταθ}.$$

Άσκηση: Να βρεθούν οι κύριες διευθ. $X(1,0) = (1,0,0)$

↳ $w = \gamma X_u(1,0) + \delta X_v(1,0)$ είναι κυρ. διευθ.

$$\begin{vmatrix} \delta^2 & \gamma\delta & \gamma^2 \\ E(1,0) & F(1,0) & G(1,0) \\ e(1,0) & f(1,0) & g(1,0) \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{vmatrix} \delta^2 & -\gamma\delta & \gamma^2 \\ 1 & 0 & a^2+1 \\ 0 & -a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (a^2+1)\delta^2 = \gamma^2$

$\gamma = \pm \delta \sqrt{a^2+1}$, $\omega = \pm\delta\sqrt{a^2+1}\, X_u(1,0) + \delta X_v(1,0)$

Έστω S κανονική επιφάνεια της οποίας όλες οι κάθετες ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο. Αποδείξτε ότι η S είναι τμήμα σφαίρας.

$$P_0 = P + \lambda(P)\, N(P)$$

Δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $\lambda : S \to \mathbb{R}$ ώστε $P + \lambda(P) N(P) = P_0$, $\forall P \in S$ $\Rightarrow \langle P, N(P)\rangle + \lambda(P) = \langle P_0, P\rangle$

$\Rightarrow \lambda(P) = -\langle P, N(P)\rangle + \langle P_0, P\rangle$

$\Phi(P) = P + \lambda(P) N(P)$

Η Φ: είναι σταθερή $\Rightarrow d\Phi = 0$.

Επίσης $\lambda \circ X(u,v) = -\langle X(u,v), N \circ (X(u,v))\rangle + \langle P_0, X(u,v)\rangle$

$\Rightarrow \lambda$: λεία

$d\Phi_P(\omega) = (\Phi \circ c)'(0) = ;$

$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$

$c(0) = ;$

$c'(0) = w$.

Έτσι $\quad \phi \circ c(t) = \phi(c(t)) = c(t) + \lambda \circ c(t)\, N \circ c'(t)$

$$(\phi \circ c)'(0) = w + (\lambda \circ c)'(0)\, N(p) + \lambda(p)\, (N \circ c)'(0)$$

$$= w + d\lambda_p(w) N(p) + \lambda(p)\, dN_p(w)$$

$$\Rightarrow \quad d\phi_p(w) = w + d\lambda_p(w)\, N(p) - \lambda_p L_p w.$$

Όλως εάν $\quad d\phi_p(w) = 0 \quad , \forall w \in T_p w.$

$$\underbrace{w - \lambda_p L_p w}_{\in T_p S} + d\lambda_p(w)\, N(p) = 0 \Rightarrow$$

$$w - \lambda(p) w = 0 \quad \text{και} \quad d\lambda_p(w) = 0 \xRightarrow{\lambda:\ \text{σταθ.}}$$

$$p + \lambda N(p) = p_0 \Rightarrow \quad p - p_0 = -\lambda N(p) \Rightarrow$$

$$d(p, p_0) = |\lambda| > 0.$$